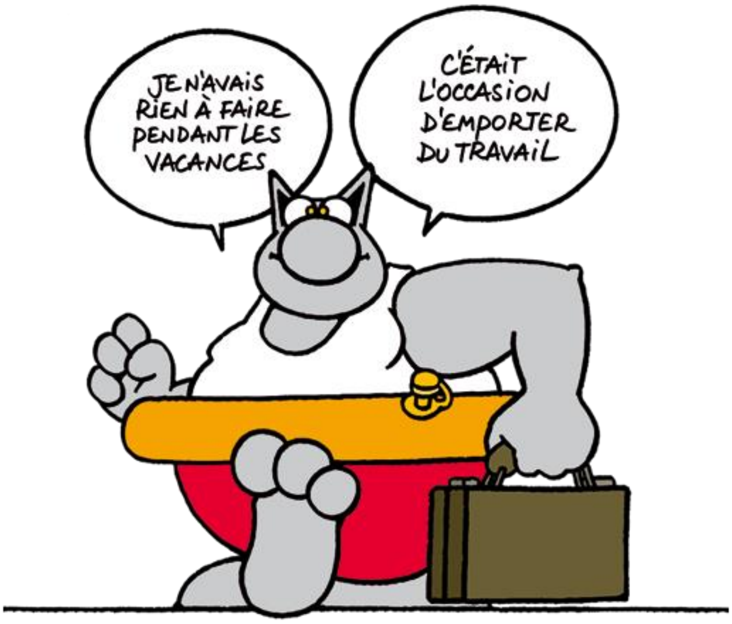
MATHEMATIQUES

Entrants en Première - Rentrée 2018

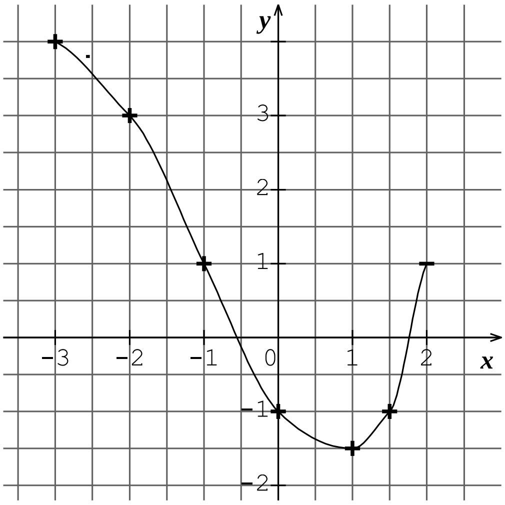
Devoir de VACANCES



Ce devoir est à traiter vers la fin du mois d'août et sera rendu au premier cours de mathématiques en Première.
Il permettra à votre professeur de voir où vous en êtes avec les notions. Il ne sera pas forcément noté.

<u>EXERCICE 1 (séries STMG-ES-S)</u>

Soit f une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre.



1) Compléter :
   - La fonction f est définie sur Df=............
   - SurDf, les extremums de f sont ....
   - Pour tout réel $x \in Df$, ….... $\leq f(x) \leq$ ....
2) Lire l'image de -1 et les antécédents éventuels de 3 sur Df.
3) Établir le tableau de variations de f.
4) Établir le tableau de signes de f.
5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -1$.
6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 1$
7) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq -2$

<u>EXERCICE 2 (séries STMG-ES-S)</u>

Le tableau suivant donne la répartition des salaires (en euros) dans une entreprise.

Salaire x_i	1 000	1 500	2 000	3 500
Effectif n_i	300	55	35	10

<u>Partie A :</u>

1) Calculer la moyenne des salaires de cette entreprise.
2) Calculer la médiane des salaires de cette entreprise.
3) Calculer l'écart-interquartile et l'étendue des salaires dans cette entreprise.

<u>Partie B :</u>

Après une négociation avec le dirigeant, le nouveau salaire y_i est donné par la formule : $y_i = 0{,}98 \times x_i + 90$

1) Calculer les nouveaux salaires dans l'entreprise.
2) Calculer l'évolution en pourcentage de chaque salaire dans l'entreprise.
3) Calculer le nouveau salaire moyen dans cette entreprise et la nouvelle médiane.
4) Calculer les nouveaux écart-interquartile et l'étendue des salaires dans cette entreprise.

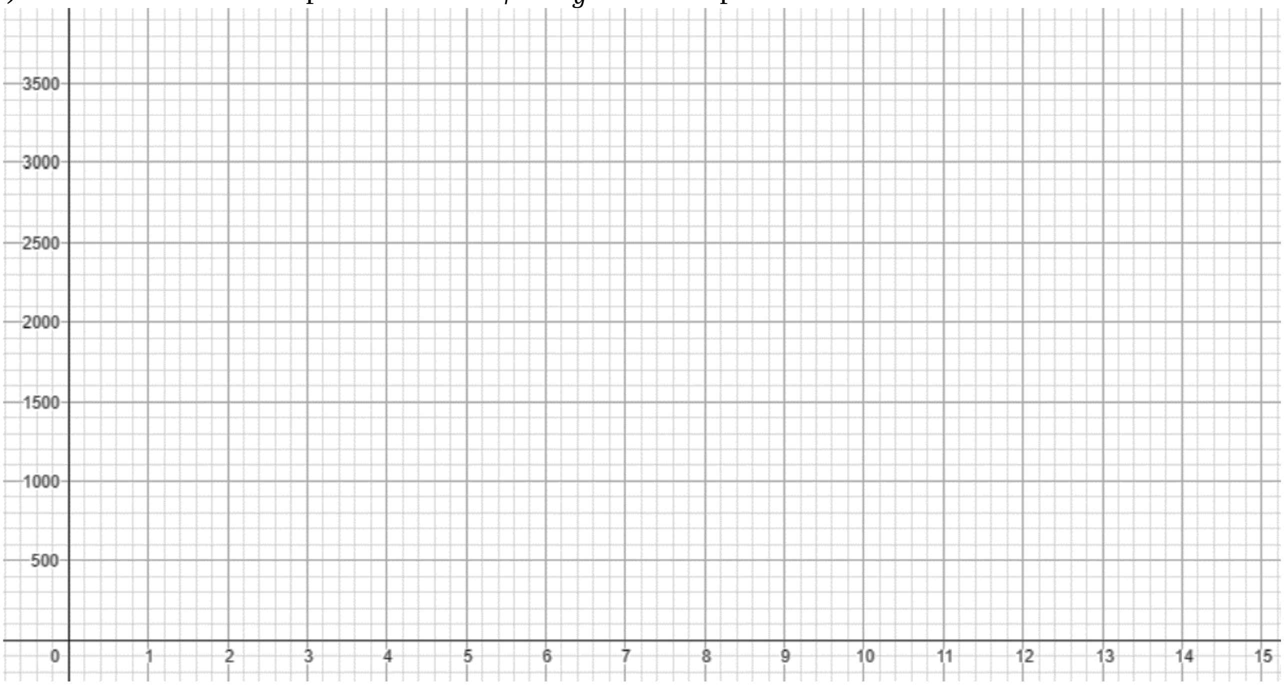
EXERCICE 3 (séries STMG-ES-S)

Un concessionnaire automobile propose à ses commerciaux deux types de rémunération :

- Contrat A : salaire mensuel fixe de 1100 euros auquel s'ajoute 175 euros par voiture vendue.
- Contrat B : salaire mensuel fixe de 1450 euros auquel s'ajoute 125 euros par voiture vendue.

On appelle f la fonction représentant le salaire avec le contrat A pour x voitures vendues et g la fonction représentant le salaire avec le contrat B pour x voitures vendues.

1) Calculer le salaire pour 3 voitures vendues avec le contrat A, puis avec le contrat B.
2) Déterminer $f(x)$ et $g(x)$. Quelle est la nature de ces fonctions ?
3) Tracer les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-dessous.



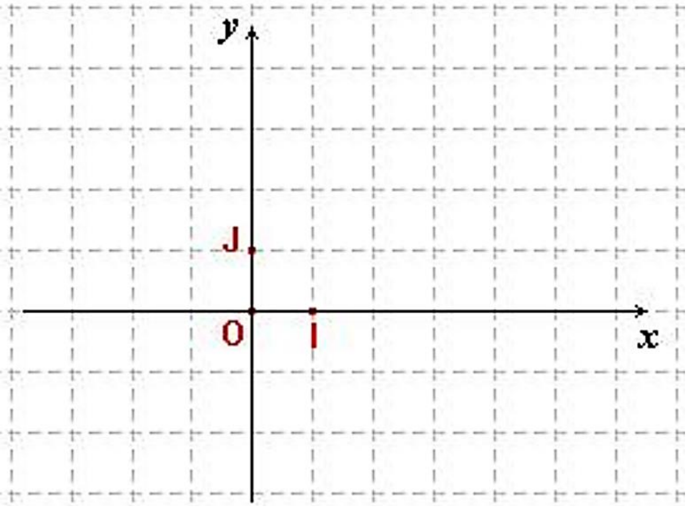
4) Résoudre les équations : a) $f(x) = 2\,675$ b) $g(x) = 2\,075$.
   Contrôler graphiquement les solutions.
5) Résoudre les inéquations : a) $f(x) \geq 1\,800$ b) $g(x) < 2\,700$.
   Contrôler graphiquement les solutions.
6) Le but de la suite de l'exercice est de déterminer quel contrat est le plus avantageux suivant le nombre de voitures vendues. Nous allons employer deux méthodes.
   a. On pose $d(x) = f(x) - g(x)$. Montrer que $d(x) = 50x - 350$, puis dresser le tableau de signes de la fonction d et conclure.
   b. Déterminer quel contrat est le plus avantageux en résolvant directement une inéquation.

EXERCICE 4 (séries ES-S)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x + 4 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -0{,}25(x+3)(x-5)$$

1) a. Construire graphiquement la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ sur le repère ci-contre.
   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 1$.
   c. Retrouver le résultat précédent par un calcul.
2) a. Construire le tableau de signes de la fonction g.
   b. En déduire l'ensemble-solution de l'inéquation $g(x) < 0$.
3) a. À l'aide des tables de valeurs de la calculatrice, construire sur le graphique précédent la courbe représentative $\mathscr{C}_g$.
   b. Confirmer le résultat de la question 2.b.



EXERCICE 5 (séries ES-S)

On considère trois machines à sous, dont le fonctionnement est modélisé par les fonctions M_1, M_2 et M_3 du second degré, définies sur] 0 ; +∞[par :

$$M_1(x) = -0{,}4(x-10)^2 + 10{,}9 \quad ; \quad M_2(x) = -x^2 + 18x - 71 \quad ; \quad M_3(x) = -0{,}5(x-1)(x-7)$$

Cela signifie que pour une mise de x euros (où $x > 0$), les gains algébriques renvoyés par ces machines sont respectivement $M_1(x)$, $M_2(x)$ et $M_3(x)$ euros.

Par exemple :
- *Si on mise 14 € dans* M_1 *, comme* $M_1(14) = 4{,}5$, *alors on gagne 4,50 €.*
- *Si on mise 3 € dans* M_2 *, comme* $M_2(3) = -26$, *alors on perd 26 €.*

1) a. Quels sont les gains algébriques de chaque machine pour une mise de 5 € ?
   b. Quelle machine semble pour le moment la plus avantageuse ?
2) Dresser le tableau de variations de la machine M_1.
3) a. Justifier que pour tout réel $x > 0$, on a : $M_2(x) = -(x-9)^2 + 10$.
   b. En déduire le tableau de variations de la machine M_2.
4) a. Résoudre l'équation $M_3(x) = 0$.
   Donner alors les deux mises qui renvoient 0 € par la machine à sous n°3.
   b. En déduire la mise qui renverra le maximum d'argent par la machine à sous n°3.
   c. Dresser alors le tableau de variations de la machine M_3.
5) a. Quelle machine renvoie le maximum d'argent ?
   b. Quelle mise choisir pour obtenir cela ?
6) En réalité, il faut tenir compte de la mise x pour déterminer les gains réels du joueur et éviter de se faire avoir par les faux-gains*.
   a. En tenant compte de cette remarque, doit-on maintenir la conclusion de la question 5.a ? Justifier.
   b. En enlevant la mise x, justifier que les bénéfices pour les trois machines sont respectivement donnés par les fonctions :

$$G_1(x) = -x^2 + 17x - 71 \qquad G_2(x) = -0{,}4x^2 + 7x - 29{,}1 \qquad G_3(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 3{,}5$$

   c. En utilisant la calculatrice, dresser les tableaux de variations de ces trois fonctions.
   d. Déterminer définitivement quelle est la machine à laquelle il faut jouer pour avoir un gain maximal, et préciser la mise à choisir et le gain maximal possible.

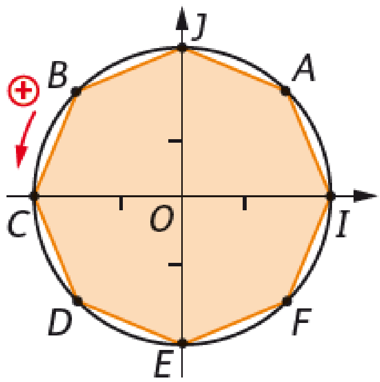
> Faux-gain
> Un **faux-gain** est un gain en trompe l'œil pour le joueur qui ne rembourse pas sa mise.
> Par exemple, payer un ticket 2€ et gagner 1€ est un faux-gain. On a en réalité perdu 1 € !

EXERCICE 6 : Vrai ou Faux ? (série S)

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associé au repère orthonormé (O ; I ; J).
Préciser dans chaque cas si l'affirmation donnée est vraie ou fausse, en justifiant.

1) Les réels $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{21\pi}{2}$ sont associés au même point sur le cercle $\mathscr{C}$
2) Les réels $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{10\pi}{3}$ sont associés au même point sur le cercle $\mathscr{C}$.
3) Si M est le point du cercle $\mathscr{C}$ associé à un réel x, alors les coordonnées de M sont $(\sin(x)\,;\cos(x))$.
4) Si $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, alors $\cos(x) \leq 0$ et $\sin(x) \leq 0$.

Pour les questions 5) à 8), on considère l'octogone régulier *IAJBCDEF* ci-contre, inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.



5) La longueur de l'arc $\widehat{IA}$ est égale à $\frac{\pi}{4}$.
6) Le point associé au réel $-\frac{11\pi}{4}$ est le point F.
7) L'abscisse du point D est $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
8) L'ordonnée du point B est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 7 (série S)

On considère un triangle ABC, et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{CD} = -2\,\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

1) Réaliser une figure en laissant les traits de construction apparents.
2) En utilisant la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{CE} = 2\,\overrightarrow{AB}$.
3) Démontrer que le point C est le milieu du segment [DE].

EXERCICE 8 (série S)

On sait que le 27 juillet 2018*, le Soleil (S), la Terre (T) et la Lune (L) seront positionnés dans un repère orthonormé suivant les coordonnées :

S(1 ; 8) ; T(−23 ; 16) ; L(−23,3 ; 16,1)

A. Par les vecteurs

1) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{ST}$et de $\overrightarrow{TL}$.
2) Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?
3) Y aura-t-il une éclipse totale lunaire, solaire ou aucune éclipse ce jour-là ?

Éclipse totale
Une **éclipse** est dite **totale** lorsque ces trois astres sont parfaitement alignés.

B. Par les droites

1) Justifier que la droite (ST) représente une fonction affine.
2) Déterminer son équation réduite.
3) Le point L appartient-il à la droite (ST) ?
4) Confirmer la conclusion donnée en A.3.

C. Par les distances

Propriété : Si AC = AB + BC alors les points A, B et C sont alignés dans cet ordre.

1) Expliquer, avec vos propres mots, la validité de la propriété encadrée ci-dessus (*Indication : que se passe-t-il si on fait un détour par le point B pour aller de A vers C ?*)
2) Pourquoi peut-on calculer les distances AC, AB et BC dans cet exercice ?
3) Calculer les distances exactes AC, AB et BC.
4) Confirmer une dernière fois la conclusion donnée en A.3.

* *Authentique*

EXERCICE 9 (série S)

1) Construire un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal et placer les points $A(-2;-5), B(-1;1), C(3;4)$ et $D(2;-2)$.
2) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
3) Sur la figure précédente, construire un représentant du vecteur $\vec{u}\binom{6}{-2}$.
4) Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{FD} = \vec{u}$.
5) Retrouver par le calcul les coordonnées des points E et F.
6) Que peut-on dire du point D ? Justifier.